Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2022-2023 гг

Заключительный этап **10 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Найдите все пары натуральных чисел $x \geq 2, y \geq 2$ такие, что остаток от деления числа $3\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{y}$ равен 1, остаток от деления числа $3\boldsymbol{y}$ на $\boldsymbol{x}$ равен 1 и остаток от деления числа $\boldsymbol{xy}$ на 3 тоже равен 1.

10.2. Вася и Петя играют в «Бери или дели». В этой игре сначала есть одна большая куча камней. Каждым ходом очередной игрок либо делит одну из уже имеющихся к моменту его хода куч любым способом на две меньших, либо забирает одну из уже имеющихся куч. Выигрывает игрок, после хода которого камней на поле вообще не останется. Игроки делают ходы по очереди, первым ход делает Вася, но этим и только этим ходом он не имеет права забрать всю кучу сразу. Кто из них победит в этой игре? Замечание: куча может содержать всего один камень.

10.3. Докажите, что для любых действительных чисел x, y из интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$, произведение которых не больше 1, выполняется неравенство $Sin\ xy \geq Sin\ x \cdot Sin\ y$.

10.4. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка P такая, что углы PAC и PBC равны. Пусть M – середина стороны AB, а точки K и L – основания перпендикуляров, опущенных из P на стороны AC и BC соответственно. Докажите, что длины отрезков MK и ML равны.

10.5. Какое максимальное количество подмножеств из 4 элементов можно выбрать во множестве из 8 элементов так, чтобы пересечение любых трёх из выбранных подмножеств содержало не более одного элемента?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2022-2023 гг

Заключительный этап **10 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Найдите все пары натуральных чисел $x \geq 2, y \geq 2$ такие, что остаток от деления числа $3\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{y}$ равен 1, остаток от деления числа $3\boldsymbol{y}$ на $\boldsymbol{x}$ равен 1 и остаток от деления числа $\boldsymbol{xy}$ на 3 тоже равен 1.

10.2. Вася и Петя играют в «Бери или дели». В этой игре сначала есть одна большая куча камней. Каждым ходом очередной игрок либо делит одну из уже имеющихся к моменту его хода куч любым способом на две меньших, либо забирает одну из уже имеющихся куч. Выигрывает игрок, после хода которого камней на поле вообще не останется. Игроки делают ходы по очереди, первым ход делает Вася, но этим и только этим ходом он не имеет права забрать всю кучу сразу. Кто из них победит в этой игре? Замечание: куча может содержать всего один камень.

10.3. Докажите, что для любых действительных чисел x, y из интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$, произведение которых не больше 1, выполняется неравенство $Sin\ xy \geq Sin\ x \cdot Sin\ y$.

10.4. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка P такая, что углы PAC и PBC равны. Пусть M – середина стороны AB, а точки K и L – основания перпендикуляров, опущенных из P на стороны AC и BC соответственно. Докажите, что длины отрезков MK и ML равны.

10.5. Какое максимальное количество подмножеств из 4 элементов можно выбрать во множестве из 8 элементов так, чтобы пересечение любых трёх из выбранных подмножеств содержало не более одного элемента?